TĐP 03: CÁC ĐƯỜNG CÔNIC

Câu 1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. A, B là các điểm trên (E) sao cho: $AF_1+BF_2=8$, với F_1,F_2 là các tiêu điểm. Tính AF_2+BF_1.

• $AF_1+AF_2=2a$ *và* $BF_1+BF_2=2a$ $\Rightarrow$ $AF_1+AF_2+BF_1+BF_2=4a=20$

Mà $AF_1+BF_2=8$ $\Rightarrow$ $AF_2+BF_1=12$

Câu 2. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, viết phương trình elip với các tiêu điểm $F_1(-1;1),F_2(5;1)$ và tâm sai $e=0,6$.

• *Giả sử* $M(x;y)$ *là điểm thuộc elip. Vì nửa trục lớn của elip là* $a=\frac{c}{e}=\frac{3}{0,6}=5$ *nên ta có:*

$$MF_1+MF_2=10\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-1)^2}=10\Leftrightarrow\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$$

Câu 3. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho điểm C(2; 0) và elip (E): $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Tìm toạ độ các điểm A, B thuộc (E), biết rằng hai điểm A, B đối xứng với nhau qua trục hoành và tam giác ABC là tam giác đều.

• $A\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7};-\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$

Câu 4. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$. Tìm các điểm M ∈ (E) sao cho $F_1MF_2=120^0$ (F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (E)).

• *Ta có:* $a=10,\ b=5\ \Rightarrow c=5\sqrt{3}$. *Gọi M(x; y) ∈ (E)* $\Rightarrow MF_1=10-\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ MF_2=10+\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

$$F_1F_2^{\ 2}=MF_1^{\ 2}+MF_2^{\ 2}-2MF_1.MF_2.\cos F_1MF_2$$

$$\Leftrightarrow\left(10\sqrt{3}\right)^2=\left(10-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2+\left(10+\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2-2\left(10-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\left(10+\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

⇔ x = 0 (y= ±5). Vậy có 2 điểm thoả YCBT: $M_1(0;5)$, $M_2(0;-5)$.

Câu 5. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip (E) có hai tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3};0);F_2(\sqrt{3};0)$ và đi qua điểm $A\left(\sqrt{3};\frac{1}{2}\right)$. Lập phương trình chính tắc của (E) và với mọi điểm M trên elip, hãy tính biểu thức: $P=F_1M^2+F_2M^2-3OM^2-F_1M.F_2M$.

• (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{3}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1,\ a^2=b^2+3\ \Rightarrow\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$

$\Rightarrow\ P=(a+ex_M)^2+(a-ex_M)^2-2(x_M^2+y_M^2)-(a^2-e^2x_M^2)=1$

Câu 6. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho elip (E): $4x^2+16y^2=64$. Gọi F_2 là tiêu điểm bên phải của (E). M là điểm bất kì trên (E). Chứng tỏ rằng tỉ số khoảng cách từ M tới tiêu điểm F_2 và tới đường thẳng $\Delta: x=\frac{8}{\sqrt{3}}$ có giá trị không đổi.

• *Ta có:* $F_2(\sqrt{12};0)$. *Gọi* $M(x_0;y_0)\in(E) \Rightarrow MF_2=a-ex_0=\frac{8-\sqrt{3}x_0}{2}$,

$d(M,\Delta)=\left|x_0-\frac{8}{\sqrt{3}}\right|=\frac{8-\sqrt{3}x_0}{\sqrt{3}}$ *(vì* $-4\le x_0\le 4$ *)* $\Rightarrow \frac{MF_2}{d(M,\Delta)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ *(không đổi).*

Câu 7. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho elip (E): $5x^2+16y^2=80$ và hai điểm A(–5; –1), B(–1; 1). Một điểm M di động trên (E). Tìm giá trị lớn nhất của diện tích ΔMAB.

• *Phương trình đường thẳng (AB):* $x-2y+3=0$ *và* $AB=2\sqrt{5}$

Gọi $M(x_0;\ y_0)\in(E)\Rightarrow 5x_0^2+16y_0^2=80.$ *Ta có:* $d(M;\ AB)=\frac{|x_0-2y_0+3|}{\sqrt{1+4}}=\frac{|x_0-2y_0+3|}{\sqrt{5}}$

Diện tích ΔMAB: $S=\frac{1}{2}.AB.d(M;\ AB)=|x_0-2y_0-3|$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki cho 2 cặp số $\left(\frac{1}{\sqrt{5}};-\frac{1}{2}\right), (\sqrt{5}x_0;\ 4y_0)$ *có:*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}.\sqrt{5}x_0-\frac{1}{2}.4y_0\right)^2\le\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)\left(5x_0^2+16y_0^2\right)=\frac{9}{20}.80=36$$

$$\Leftrightarrow |x_0-2y_0|\le 6\Leftrightarrow -6\le x_0-2y_0\le 6\Leftrightarrow -3\le x_0-2y_0+3\le 9\Rightarrow |x_0-2y_0+3|\le 9$$

$$\Rightarrow \max|x_0-2y_0+3|=9\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\sqrt{5}x}{\frac{1}{\sqrt{5}}}=\dfrac{4y}{-\frac{1}{2}}\\ x_0-2y_0+3=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x_0=-8y_0\\ x_0-2y_0=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=\frac{8}{3}\\ y_0=-\frac{5}{3}\end{cases}$$

Vậy, $\max S_{MAB}=9$ *khi* $M\left(\frac{8}{3};-\frac{5}{3}\right)$.

Câu 8. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho elíp $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và hai điểm A(3;–2), B(–3; 2) . Tìm trên (E) điểm C có hoành độ và tung độ dương sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

• *PT đường thẳng AB:* $2x+3y=0$. *Gọi C(x; y) ∈ (E), với* $x>0,y>0\Rightarrow\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.d(C,AB)=\frac{\sqrt{85}}{2\sqrt{13}}|2x+3y|=3.\sqrt{\frac{85}{13}}\left|\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\right|\le 3\sqrt{\frac{85}{13}}\sqrt{2\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\right)}=3\sqrt{\frac{170}{13}}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\\ \frac{x}{3}=\frac{y}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\frac{\sqrt{2}}{2}\\ y=\sqrt{2}\end{cases}$. *Vậy* $C\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right)$.

Câu 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ và điểm $M(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua M và cắt elip tại hai điểm A,B sao cho M là trung điểm của AB.

• Nhận xét rằng $M \notin Ox$ nên đường thẳng $x=1$ không cắt elip tại hai điểm thỏa YCBT.
Xét đường thẳng Δ qua M(1; 1) có PT: $y=k(x-1)+1$. Toạ độ các giao điểm A,B của Δ và (E) là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 & (1) \\ y=k(x-1)+1 & (2) \end{cases}$

$\Rightarrow (25k^2+9)x^2-50k(k-1)x+25(k^2-2k-9)=0$ *(3)*

PT (3) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 với mọi k. Theo Viet: $x_1+x_2=\frac{50k(k-1)}{25k^2+9}$.

Do đó M là trung điểm của AB $\Leftrightarrow x_1+x_2=2x_M \Leftrightarrow \frac{50k(k-1)}{25k^2+9}=2 \Leftrightarrow k=-\frac{9}{25}$.

Vậy PT đường thẳng Δ: $9x+25y-34=0$.

Câu hỏi tương tự:

a) Với $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, $M(1;1)$ *ĐS:* $\Delta: 4x+9y-13=0$

Câu 10. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ O*xy*, cho elip (E): $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. Tìm điểm M ∈ (E) sao cho M có toạ độ nguyên.

• Trước hết ta có nhận xét: Nếu điểm $(x;y)\in(E)$ thì các điểm $(-x;y),(x;-y),(-x;-y)$ cũng thuộc (E). Do đó ta chỉ cần xét điểm $M(x_0;y_0)\in(E)$ với $x_0,y_0\ge 0; x_0,y_0\in Z$.

Ta có: $\frac{x_0^2}{8}+\frac{y_0^2}{2}=1 \Rightarrow y_0^2\le 2 \Rightarrow 0\le y_0\le\sqrt{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_0=0\Rightarrow x_0=2\sqrt{2}\ (loại) \\ y_0=1\Rightarrow x_0=2 \end{array}\right. \Rightarrow M(2;1)$.

Vậy các điểm thoả YCBT là: $(2;1),(-2;1),(2;-1),(-2;-1)$.

Câu 11. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ O*xy*, cho elip (E): $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. Tìm điểm M ∈ (E) sao cho tổng hai toạ độ của M có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

• Giả sử $M(x;y)\in(E) \Rightarrow \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. *Áp dụng BĐT Bunhiacốpxki, ta có:*

$(x+y)^2\le(8+2)\left(\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}\right)=10 \Rightarrow -\sqrt{10}\le x+y\le\sqrt{10}$.

$+\ x+y\le\sqrt{10}$. *Dấu "=" xảy ra* $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{8}=\frac{y}{2} \\ x+y=\sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow M\left(\frac{4\sqrt{10}}{5};\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$.

$+\ x+y\ge-\sqrt{10}$. *Dấu "=" xảy ra* $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{8}=\frac{y}{2} \\ x+y=-\sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow M\left(-\frac{4\sqrt{10}}{5};-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$

Câu 12. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$ và điểm $A(3;0)$. Tìm trên (E) các điểm B, C sao cho B, C đối xứng qua trục Ox và ΔABC là tam giác đều.

• *Không mất tính tổng quát, giả sử* $B(x_0;y_0), C(x_0;-y_0)$ *với* $y_0>0$.

Ta có: $\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{3}=1 \Leftrightarrow x_0^2+3y_0^2=9$. $BC=2y_0$ *và* $(BC): x=x_0 \Rightarrow d(A,(BC))=|3-x_0|$

Do $A\in Ox$, *B và C đối xứng qua Ox nên ΔABC cân tại A*

Suy ra: ΔABC *đều* $\Leftrightarrow d(A,(BC))=\frac{\sqrt{3}}{2}BC \Leftrightarrow |3-x_0|=\sqrt{3}y_0 \Leftrightarrow 3y_0^2=(x_0-3)^2$

$\Rightarrow x_0^2+(x_0-3)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=3 \end{array}\right.$.

+ *Với* $x_0=0 \Rightarrow y_0=\sqrt{3} \Rightarrow B(0;\sqrt{3}), C(0;-\sqrt{3})$. + *Với* $x_0=3 \Rightarrow y_0=0$ *(loại).*

Vậy: $B(0;\sqrt{3}), C(0;-\sqrt{3})$.

Câu 13. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và các đường thẳng $d_1: mx-ny=0$, $d_2: nx+my=0$, với $m^2+n^2\neq 0$. Gọi M, N là các giao điểm của d_1 với (E), P, Q là các giao điểm của d_2 với (E). Tìm điều kiện đối với m,n để diện tích tứ giác MPNQ đạt giá trị nhỏ nhất.

• *PTTS của* d_1,d_2 *là:* $d_1: \begin{cases} x=nt_1 \\ y=mt_1 \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x=-mt_2 \\ y=nt_2 \end{cases}$.

+ *M, N là các giao điểm của* d_1 *và (E)*

$$\Rightarrow M\left(\frac{6n}{\sqrt{9m^2+4n^2}};\frac{6m}{\sqrt{9m^2+4n^2}}\right), N\left(\frac{-6n}{\sqrt{9m^2+4n^2}};\frac{-6m}{\sqrt{9m^2+4n^2}}\right)$$

+ *P, Q là các giao điểm của* d_2 *và (E)*

$$\Rightarrow P\left(\frac{-6m}{\sqrt{4m^2+9n^2}};\frac{6n}{\sqrt{4m^2+9n^2}}\right), Q\left(\frac{6m}{\sqrt{4m^2+9n^2}};\frac{-6n}{\sqrt{4m^2+9n^2}}\right)$$

+ *Ta có:* $MN\perp PQ$ *tại trung điểm O của mỗi đường nên MPNQ là hình thoi.*

$$S=S_{MPNQ}=\frac{1}{2}MN.PQ=2OM.OP=2\sqrt{x_M^2+y_M^2}.\sqrt{x_P^2+y_P^2}=\frac{72(m^2+n^2)}{\sqrt{(9m^2+4n^2)(4m^2+9n^2)}}$$

Áp dụng BĐT Cô-si: $\sqrt{(9m^2+4n^2)(4m^2+9n^2)}\le\frac{(9m^2+4n^2)+(4m^2+9n^2)}{2}=\frac{13}{2}(m^2+n^2)$

$\Rightarrow S\ge\frac{72(m^2+n^2)}{\frac{13}{2}(m^2+n^2)}=\frac{144}{13}$. *Dấu "=" xảy ra* $\Leftrightarrow 9m^2+4n^2=4m^2+9n^2 \Leftrightarrow m=\pm n$

Vậy: $\min S=\frac{144}{13}$ *khi* $m=\pm n$.

Câu 14. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ *Oxy*, cho Hypebol (*H*) có phương trình: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

Viết phương trình chính tắc của elip (*E*) có tiêu điểm trùng với tiêu điểm của (*H*) và ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của (*H*).

• *(H) có các tiêu điểm* $F_1(-5;0); F_2(5;0)$. *HCN cơ sở của (H) có một đỉnh là M(4; 3),*

Giả sử phương trình chính tắc của (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *(với a > b)*

(E) cũng có hai tiêu điểm $F_1(-5;0); F_2(5;0) \Rightarrow a^2-b^2=5^2$ (1)

$$M(4;3)\in(E) \Leftrightarrow 9a^2+16b^2=a^2b^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases} a^2=5^2+b^2 \\ 9a^2+16b^2=a^2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=40 \\ b^2=15 \end{cases}$. *Vậy (E):* $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{15}=1$

Câu 15. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ O*xy* , cho hypebol (H) có phương trình $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$.
Giả sử (d) là một tiếp tuyến thay đổi và F là một trong hai tiêu điểm của (H), kẻ FM ⊥(d). Chứng minh rằng M luôn nằm trên một đường tròn cố định, viết phương trình đường tròn đó

• *(H) có một tiêu điểm* $F(\sqrt{13};0)$. *Giả sử pttt (d): ax + by + c = 0 . Khi đó:* $9a^2 - 4b^2 = c^2$ *(*)*

Phương trình đường thẳng qua F vuông góc với (d) là (D): $b(x-\sqrt{13}) - ay = 0$

Toạ độ của M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} ax+by=-c \\ bx-ay=\sqrt{13}b \end{cases}$

Bình phương hai vế của từng phương trình rồi cộng lại và kết hợp với (*), ta được $x^2 + y^2 = 9$

Câu 16. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ O*xy*, cho parabol (P): $y^2 = x$ và điểm I(0; 2). Tìm toạ độ hai điểm M, N ∈ (P) sao cho $\overrightarrow{IM}=4\overrightarrow{IN}$.

• *Gọi* $M(x_0;y_0)$, $N(x_1;y_1)$ *là hai điểm thuộc (P), khi đó ta có:* $x_0=y_0^2; x_1=y_1^2$

$\overrightarrow{IM}=(x_0;y_0-2)=(y_0^2;y_0-2)$; $\overrightarrow{IN}=(y_1;y_1-2)=(y_1^2;y_1-2)$; $4\overrightarrow{IN}=(4y_1^2;4y_1-8)$

Theo giả thiết: $\overrightarrow{IM}=4\overrightarrow{IN}$, *suy ra:* $\begin{cases} y_0^2=4y_1^2 \\ y_0-2=4y_1-8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1=1 \Rightarrow x_1=1;\ y_0=-2;\ x_0=4 \\ y_1=3 \Rightarrow x_1=9;\ y_0=6;\ x_0=36 \end{array}\right.$

Vậy, có 2 cặp điểm cần tìm: $M(4;-2), N(1;1)$ *hay* $M(36;6), N(9;3)$.

Câu 17. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ O*xy*, cho parabol (P): $y^2=8x$. Giả sử đường thẳng d đi qua tiêu điểm của (P) và cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ tương ứng là x_1, x_2. Chứng minh: AB = x_1+x_2+4.

• *Theo công thức tính bk qua tiêu:* $FA=x_1+2$, $FB=x_2+2 \Rightarrow AB=FA+FB=x_1+x_2+4$.

Câu 18. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ O*xy*, cho Elip (E): $x^2+5y^2=5$, Parabol $(P): x=10y^2$. Hãy viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng $(\Delta): x+3y-6=0$, đồng thời tiếp xúc với trục hoành Ox và cát tuyến chung của Elip (E) với Parabol (P).

• *Đường thẳng đi qua các giao điểm của (E) và (P): x = 2*

Tâm I ∈ Δ nên: $I(6-3b;b)$. *Ta có:* $|6-3b-2|=|b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4-3b=b \\ 4-3b=-b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ *(C):* $(x-3)^2+(y-1)^2=1$ *hoặc (C):* $x^2+(y-2)^2=4$